

Contrôle continu de mécanique

L'usage des calculatrices est interdit.

(durée : 45 minutes)

NOM :	Prénom :	Groupe :	Note (/20) :
-------	----------	----------	--------------

De nombreuses questions sont indépendantes, et des résultats intermédiaires sont donnés, de manière à pouvoir continuer le sujet, sans être bloqué.

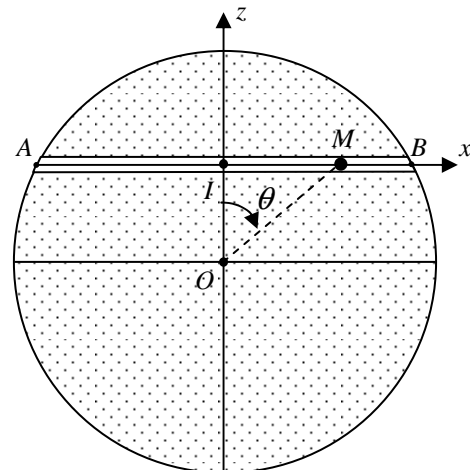
Sujet inspiré de l'exercice 2 du sujet de mécanique partie I Session 2004

La Terre est assimilée à une sphère homogène de centre O , de rayon R et de masse M_T . Soit g_o la valeur de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre.

Dans tout l'exercice, on ne tiendra pas compte de la rotation de la Terre : le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen.

On relie deux villes A et B par un tunnel rectiligne de longueur $AB = d$. Un train, assimilable à un point matériel M se déplace sans frottement dans le tunnel (Figure ci-dessous). On note r la distance OM et I le point milieu de AB . Le train part de A avec une vitesse initiale nulle, et arrive en B au bout d'un temps t_{AB} .

On associe au tunnel le référentiel $\mathfrak{R} = (I, xyz)$, tel que représenté ci-dessous, et, on note x l'abscisse de M dans \mathfrak{R} , et θ l'angle d'inclinaison de \overline{OM} par rapport à $\overline{e_z}$.



1- Qu'est-ce que le référentiel géocentrique ? Quel est la différence avec \mathfrak{R} ?

2- Donner la définition d'un référentiel galiléen.

- 3- Enoncer le théorème de Gauss en mécanique du point. On précisera le nom de toutes les variables introduites.
- 4- Montrer qu'on peut en déduire que le champ de gravitation terrestre peut s'écrire, en un point M intérieur à la Terre, sous la forme $\vec{G} = -M_T G \frac{r}{R^3} \vec{e}_r$, dans laquelle on définira le vecteur \vec{e}_r . G est la constante universelle de gravitation.
- 5- Donner la définition du champ de pesanteur terrestre, et expliquer pourquoi on peut confondre champ de pesanteur terrestre \vec{g} et champ de gravitation terrestre \vec{G} .
- 6- Dédire des questions 4 et 5 l'expression du champ de pesanteur terrestre \vec{g}_o à la surface terrestre en fonction de M_T , G et R^2 .

- 7- Quelle est l'expression, en fonction de \vec{g}_o , du champ de pesanteur terrestre \vec{g} en un point M quelconque intérieur à la Terre ? Le représenter sur la figure.
- 8- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à M dans \mathfrak{R} .
- 9- On rappelle que si le point se déplace sans frottement, alors la réaction du support sur M est perpendiculaire à sa trajectoire. Projeter la relation précédente (question 8) suivant la direction Ix , et donner alors l'équation du mouvement de M , en fonction des seuls paramètres x , R et g_o .
- 10- Dédurre de la question 9 l'expression $x(t)$ de la variation de x en fonction du temps t , et préciser la période du mouvement de M .
- 11- Déterminer alors la durée t_{AB} du trajet AB en fonction de g_o et R .

12- Quelles est l'expression de la vitesse maximale V_{\max} du train en fonction de d , g_o et R ?

13- Application numérique : on se propose de relier de cette manière deux villes distantes de $AB = 400$ km. On prendra $R = 6400$ km, $g_o = 10 \text{ m.s}^{-2}$, et on approximera $\pi \approx 3,1$.

a) Calculer la profondeur maximale p du tunnel à construire. On prendra : $\sqrt{64^2 - 4} = 63,97$.

b) Donner, en minutes, la valeur approchée de la durée du trajet AB .

c) Calculer la vitesse maximale V_{\max} du train en km.h^{-1} .